Моторина И. Ю., Курзенев В. А.

Фрактальный анализ динамики коэффициентов финансового состояния предприятий

Моторина Ирина Юрьевна
СПб ГКУ «Централизованная бухгалтерия администрации Калининского района» (Санкт-Петербург)
Заместитель директора
cbkalin@cbkalin.gugov.spb.ru

Курзенев Владимир Анатольевич
Северо-Западный институт управления — филиал РАНХиГС (Санкт-Петербург)
Профессор кафедры экономики и финансов
Доктор технических наук, профессор
kurzenev@szags.ru

РЕФЕРАТ
В статье проводится общий анализ возникновения банкротства, предлагается для прогнозирования его наступления применить альтернативные статистическому анализу методы фрактального анализа, в основу которого положен принцип самоподобия. Работоспособность метода апробирована на отраслевой статистике Северо-Западного федерального округа.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
банкротство (несостоятельность), фрактальный и мультифрактальный анализ, параметр Херста, индекс фрактальности

Motorina I. Yu., Kurzenev V. A.

Fractal Analysis of Dynamics of Coefficients of a Financial Standing of the Company

Motorina Irina Yurevna
SPb SPI «The Centralized Accounts Department of Administration of Kalininsky District», St. Petersburg
Deputy Director
cbkalin@cbkalin.gugov.spb.ru

Kurzenev Vladimir Anatolyevich
North-West Institute of Management — branch of the Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Saint-Petersburg, Russian Federation)
Professor of the Chair of the Economy and Finance
Doctor of Science (Technical Sciences), Professor
kurzenev-va@szags.ru

ABSTRACT
In the article the general analysis of emergence of bankruptcy is carried out, it is offered to forecasting of bankruptcy apply methods of the fractal analysis, which basis principle is self-similarity, alternative to the statistical analysis. Operability of a method is approved on branch statistics of the North-Western Federal District.

KEYWORDS
bankruptcy (insolvency), fractal and multi-fractal analysis, Hurst exponent, an index of fractality

При оценке финансовой состоятельности предприятий большое внимание уделяется разработке моделей прогнозирования их банкротства. На практике обычно используются статистические модели, основанные на анализе временных рядов для финансовых коэффициентов. Сложное непредсказуемое поведение экономической системы может быть обусловлено случайными изменениями параметров, случайными воздействиями, а также развитием в системе разнообразных неустойчивостей, порождающих «детерминированный хаос» [5]. Для изучения сложных процессов с высокой степенью неопределенности используются различные вероятностные подходы.

Классические методы вероятностного и статистического анализа случайных величин и функций оперируют обычно такими понятиями, как функции и плотности распределения вероятностей, характеристики положения (математическое ожидание и начальные моменты), характеристики рассеяния (дисперсия и центральные моменты), характеристики формы (асимметрия и эксцесс), автокорреляционные функции, спектральные плотности. Статистический анализ предполагает и широкое использование выборочных методов (с определением точечных и интервальных оценок параметров), проверку статистических гипотез и регрессионный анализ. Однако эти методы предполагают наличие достаточно больших временных интервалов для нахождения глобальных характеристик процессов, что не позволяет с их помощью вскрыть локальную структуру анализируемых процессов.

Кроме того, классические статистические методы в своей основе используют гипотезу о гауссовском характере случайных процессов с законом «трех сигм». В сложных системах на практике эта гипотеза часто не выполняется. Известно, например, что процессы большого класса информационных систем гораздо лучше описываются с помощью гиперболических распределений (одностороннего и двухстороннего Ципфа — Парето), где дисперсия оказывается неограниченной при показателе степени меньше двух. В силу неограниченности дисперсии закон «трех сигм» не выполняется, и прогноз становится практически невозможным.

В то же время необходимость иметь информацию о локальной структуре процессов очевидна. Такую возможность предоставляет фрактальный и мультифрактальный анализ, основы которого заложил Б. Мандельброт [4]. Базовыми понятиями в этой теории являются фрактал и мультифрактал. Под фракталами понимают некоторые математические конструкции (конструктивные функции), геометрическая интерпретация которых позволяет утверждать о свойстве масштабного самоподобия. Самоподобие объекта (фрактала) означает, что в широком диапазоне масштабов он устроен единообразно. Это означает, что при увеличении малые фрагменты фрактала получаются похожими на большие. Фрактальный, или мультифрактальный анализ данных позволяет выявить изменение характера тренда — тенденции процесса [2].

Основной характеристикой фрактала является его фрактальная размерность (в математике ее называют размерность Хаусдорфа–Безиковича):

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}, \tag{1}$$

где $N(\varepsilon)$ — количество d-мерных «шаров» радиуса ε, покрывающих множество — фрактал (объект). При достаточно малых ε эта величина меняется по степенному закону: $N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^D}$.

По Мандельброту фрактал представляет собой объект, размерность по Хаусдорфу — Безиковичу которого больше его топологической размерности. Величина D является локальной характеристикой объекта.

Алгоритмы построения фракталов могут иметь случайный характер, тогда фрактал называют случайным. Примером случайного фрактала является траектория броуновского движения. Броуновское движение называют статистически самоподобным. В этом случае кроме фрактальной размерности необходимо учитывать и статистические свойства. Такие неоднородные фракталы называют мультифракталами, для описания которых используется целый спектр фрактальных размерностей.

Если с другой стороны исходить из того, что броуновское движение есть гауссов случайный процесс, то его приращение на любом промежутке времени есть также гауссово с дисперсией:

$$\sigma 2|t_2 - t_1|.$$

Математическое ожидание приращения определится выражением:

$$E\left[X(t_2)-X(t_1)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma\sqrt{|t_2-t_1|}.$$

Приращение броуновского сигнала (траектории броуновского движения) обладает свойством статистического самоподобия, т. е. случайные величины $X(t + \Delta t) - X(t)$ и $\frac{1}{\sqrt{s}}\left(X(t+\Delta t)-X(t)\right)$ для любого $s > 0$ имеют одинаковое распределение, математическое ожидание и дисперсию. Применяя к броуновскому сигналу на единичном интервале процедуру определения фрактальной размерности, имеем число квадратов-разбиений:

$$N(\Delta t)\sim(\Delta t)^{-1}(\Delta t)^{-\frac{1}{2}}=(\Delta t)^{-\frac{3}{2}}.$$

Тогда фрактальная размерность броуновского сигнала равна 1,5.

Известно, что модель броуновского движения можно рассматривать как марковский случайный процесс. Это значит, что вероятность достижения сигнала $X(t_2)$ не зависит от его поведения при $t < t_1$. Такой процесс можно назвать процессом «без памяти».

Если нужно описать процессы с «памятью», как имеет место при анализе наблюдений во времени, то удобно использовать модель обобщенного броуновского движения. Для него приращение имеет гауссово распределение с дисперсией

$$E\left[\left(X(t_2)-X(t_1)\right)^2\right]=\sigma^2\,|t_2-t_1|^{2H}$$

и математическим ожиданием

$$E\left[X(t_2)-X(t_1)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma|t_2-t_1|^{H}.$$

Параметр H $(0 < H < 1)$ называют параметром Херста. Используя ту же схему определения фрактальной размерности, получаем $D = 2 - H$. Параметр Херста принимается обычно за основную характеристику при фрактальном анализе случайных сигналов. Он характеризует степень «изрезанности» графика. Чем меньше его значение, тем сильнее «изрезанность» графика. Этот параметр также является важным для задач прогноза. В [2] параметр Херста определяется через нормированный размах на отрезке времени Δt:

$$H=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\ln\left(\frac{R}{S}\right)}{\ln(\Delta t)}, \quad (2)$$

где размах $R = \max\limits_{t\in\Delta t} X_Y(t) - \min\limits_{t\in\Delta t} X_Y(t)$, а S — оценка стандартного отклонения на интервале Δt.

Понятно, что при $H = \frac{1}{2}$ имеет место броуновская модель процесса, а при $H \neq \frac{1}{2}$ обобщенная броуновская. В последнем случае процесс имеет бесконечно большое время корреляции. Это следует из того, что функция корреляции будущих приращений с прошлыми, нормированная по дисперсии, находится по формуле, которую несложно получить:

$$r(t) = \frac{E\left[-X_H(-t)X_H(t)\right]}{EX_H^2(t)} = 2^{2H-1} - 1. \quad (3)$$

В самом деле, при $H \neq \frac{1}{2}$ имеет место $r(t) \neq 0$ независимо от времени.

Если $H > \frac{1}{2}$ (имеет место персистемность), то сохраняется тенденция изменения характера процесса, т. е. увеличение в прошлом означает тенденцию к увеличению в будущем для любого времени t. Уменьшение в прошлом означает в среднем уменьшение в будущем.

Если же $H < \frac{1}{2}$, то этот случай соответствует антиперсистемности. В таком варианте рост в прошлом означает уменьшение в будущем, а уменьшение в прошлом делает вероятным увеличение в будущем.

В случае с показателями финансового состояния предприятий интерес представляет поведение их фрактальных параметров, характеризующих динамическую структуру и позволяющих оценить факт финансовой несостоятельности предприятий.

Фрактальные процессы обладают следующими основными свойствами:

1. Практически все фрактальные процессы являются долговременно зависимыми. Долгосрочная зависимость подразумевается при условии $0,5 < H < 1$, в ином случае долгосрочная зависимость отсутствует.
2. Свойство медленного убывания дисперсии. Дисперсия среднего значения выборок из исследуемых фрактальных рядов не уменьшается с увеличением объема выборки. Для самоподобных процессов характерно более медленное затухание дисперсии по закону:

$$D\left[X^{(m)}\right] \cong c_1 m^{2H-2} \text{ при } m \to \infty,\ 0 < H < 1, \quad (4)$$

где c_1 — некоторая константа; m — число «разбиений» на интервале.

Данное свойство исключает возможность использования традиционного статистического инструментария для анализа фрактальных процессов, но это не является недостатком использования самоподобых моделей для временных рядов, поскольку для этого требуется изучение характеристики степени самоподобия, которая выражается с использованием единственного параметра Херста.

Если он находится в пределах от $0,5$ до 1, то исследуемый процесс считается самоподобным, ряд является персистентным, или трендоустойчивым, и при $H \to 1$ степень самоподобия и долговременная зависимость возрастают. Если параметр Херста примерно равен $0,5$, процесс носит характер обычного броуновского движения, если же значение данного параметра меньше $0,5$, то процесс не обладает свойством самоподобия, временной ряд называют антиперсистентным, т. е. не сохраняющим первоначальную тенденцию.

Существует несколько методов оценки самоподобия временных рядов: метод R/S статистики (нормированного размаха, или rescaled range), дисперсионновременной метод (вариационно-временной метод, variance-time plot, или метод aggregated variance), и периодограммный анализ. В данной работе использован один из широко применяемых методов для оценки параметра Херста — метод нормированного размаха.

Метод нормированного размаха состоит в построении последовательности значений R/S (отношение размаха к среднеквадратическому отклонению) в зависимости от N (число включенных в интервал моментов времени) на логарифмических осях. Херст эмпирически показал, что отношение R/S описывается степенным законом:

$$R/S \cong (aN)^{H}, \tag{5}$$

где a — произвольный параметр; H — показатель Херста; S — среднеквадратичное отклонение.

Здесь выборочная оценка R/S определяется по формуле:

$$\frac{R}{S}=\frac{\max\limits_{1\le j\le N}\left(\sum_{k=1}^{j}X_k-\bar{X}_N\right)-\min\limits_{1\le j\le N}\left(\sum_{k=1}^{j}X_k-\bar{X}_N\right)}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(X_k-\bar{X}_N\right)^2}}, \tag{6}$$

где $\bar{X}_N$ — выборочное среднее за период времени N:

$$\bar{X}_N=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}X_j. \tag{7}$$

График зависимости R/S от N в дискретном времени в логарифмическом масштабе по обеим шкалам использует тот факт, что для самоподобной последовательности данных R/S статистика растет согласно степенному закону с экспонентой H как функция числа включенных точек (количество включенных в интервал моментов времени, N). При расчете показателя Херста с использованием R/S — анализа величина H определяется через угол наклона прямой линии, которая строится в координатах $[y_i \equiv \log(R/S),\ x_i \equiv \log N]$.

В основу исследования легла оценка динамики показателя, полученного с использованием метода главных компонент [1; 3]. Анализу подверглось финансовое состояние двух организаций (ОАО «Псковский хлебокомбинат» и ОАО «Калищехлеб») пищевой промышленности СЗФО в период с 2004 по 2008 гг. Одно из предприятий в 2008 г. обанкротилось (ОАО «Калищехлеб»). Обе организации по организационно-правовой форме являются открытыми акционерными обществами и занимаются производством хлебобулочных изделий. Различная судьба этих двух схожих по своим характеристикам предприятий породила закономерный интерес к сравнительной оценке свойств динамических структур показателей, характеризующих их финансовое состояние.

На основе собранной по этим организациям статистической информации были сформированы таблицы, в которых представлены данные по этим организациям за 5 лет поквартально по 9 следующим показателям: рентабельность активов, рентабельность собственного капитала, коэффициент текущей ликвидности, коэффициент абсолютной ликвидности, показатель обеспеченности обязательств активами, коэффициент автономии, коэффициент обеспеченности собственными оборотными средствами, показатель отношения дебиторской задолженности к совокупным активам и соотношение заемных и собственных средств. Таким образом была получена система показателей, в которой каждой организации соответствует значение каждого из 9 коэффициентов поквартально за каждый год.

Далее методом главных компонент для данных предприятий были определены компоненты, из которых было выделено по одной, вносящей наибольший вклад в общий объем информации исходных признаков. Именно их динамика подверглась проверке на наличие признаков самоподобия. Таким образом, R/S-анализу подвергся временной ряд длиной $N = 20$. По формуле (6) были вычислены значения R/S для различных N, и путем построения уравнений регрессии методом наименьших квадратов для предприятий были определены оценки показателя Херста (рис. 1, 2).

Уравнение регрессии для ОАО «Псковский хлебокомбинат»: $y = 0{,}6023x - 0{,}0048$. Параметр Херста $H = 0{,}6023$. Можно показать, что эта оценка статистически значима. Отклонения от прямой линии свидетельствуют об относительно слабой сходимости к асимптотике из-за ограниченного объема данных.

Уравнение регрессии для ОАО «Калищехлеб»: $y = 0{,}5801x + 0{,}0064$. Параметр Херста $H = 0{,}5801$.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что временному ряду динамики кумулятивного коэффициента, характеризующего финансовое состояние благополучного предприятия, свойственна большая трендоустойчивость. Данное обстоятельство позволяет выдвинуть гипотезу о различиях в динамических структурах финансовых показателей предприятий-банкротов и небанкротов и предположить перспективность использования фрактального анализа в качестве дополнительного инструмента для прогнозирования банкротства.

Однако при использовании методов фрактального анализа для дальнейших исследований в данной сфере необходимо значительное увеличение длины исследуемых временных рядов, поскольку, как отмечал Г. Э. Херст, с помощью R/S-анализа вычисляется «отношение, которое будет верным только для большого N» [5], т. е. для сокращения ошибок при оценке результатов анализа динамических структур требуется увеличение количества наблюдений.

В практических расчетах перспективной является другая фрактальная характеристика — индекс фрактальности μ. ($V_X(s) \sim \sigma{-}\mu$, $\mu = D - 1 = 1 - H$). Главным преимуществом индекса μ по сравнению с другими фрактальными показателями (в частности с показателем Херста H) является то, что соответствующая ему величина $V_X(s)$ ($V_X(\delta) \equiv \sum_{i=1}^{m} A_i(\delta)$, где $A_i(\delta) = \max_{t\in\Delta t} X_i(t) - \min_{t\in\Delta t} X_i(t)$) имеет быстрый выход на степенной асимптотический режим [5]. Это дает возможность использовать его в качестве локальной характеристики, определяющей динамику исходного процесса.

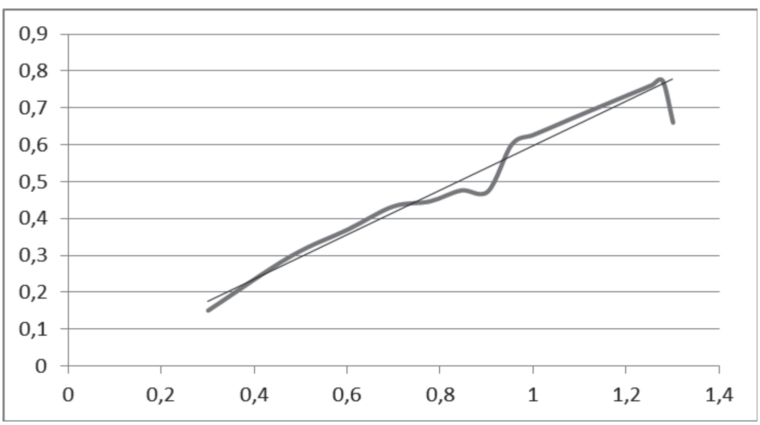

Рис. 1. Определение значения параметра Херста при оценке динамической структуры главной компоненты матрицы финансовых показателей ОАО «Псковский хлебокомбинат» по кварталам (2004–2008 гг.)

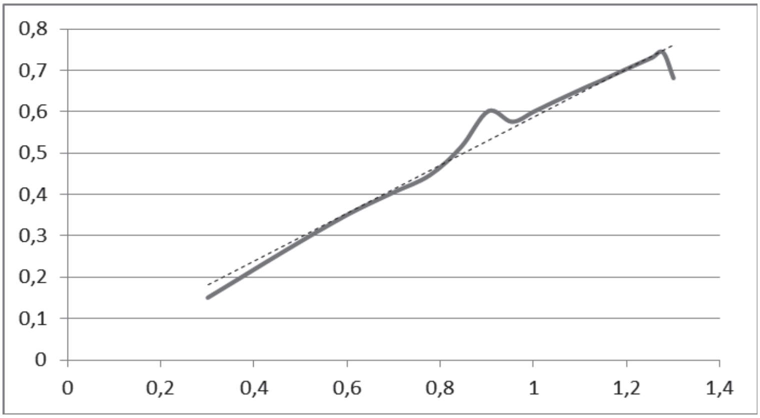

Рис. 2. Определение значения параметра Херста при оценке динамической структуры главной компоненты матрицы финансовых показателей ОАО «Калищехлеб» по кварталам (2004–2008 гг.)

Чтобы соотнести значение μ с поведением временного ряда, естественно ввести функцию $\mu(t)$ как такое значение индекса, которое еще может быть вычислено с приемлемой точностью на минимальном, предшествующем t интервале $\tau\mu$. Методика определения индекса фрактальности основана на понятии минимального покрытия графика процесса, что позволяет существенно увеличить скорость сходимости к асимптотике.

Применяя методику расчета индекса фрактальности [6] по данным статистики для тех же предприятий (см. рис. 3 и 4), получаем значения индексов фрактальности 0,022 и 0,037 соответственно, что практически позволяет сделать те же выводы, что и при применении параметра Херста.

Уравнение регрессии для ОАО «Псковский хлебокомбинат»: $y = 0{,}022x + 3{,}685$. Индекс фрактальности $\mu = 0{,}022$.

Уравнение регрессии для ОАО «Калищехлеб»: $y = 0{,}037x + 3{,}2761$. Индекс фрактальности $\mu = 0{,}037$.

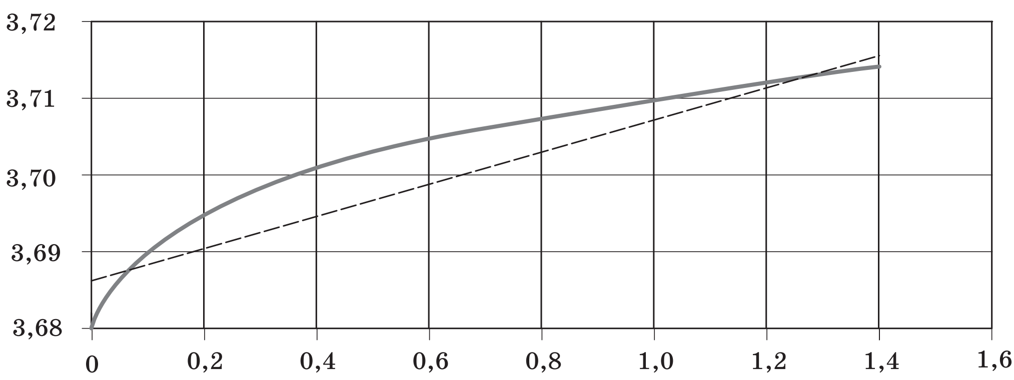

Рис. 3. Определение значения индекса фрактальности при оценке динамической структуры главной компоненты матрицы финансовых показателей ОАО «Псковский хлебокомбинат» по кварталам (2004–2008 гг.)

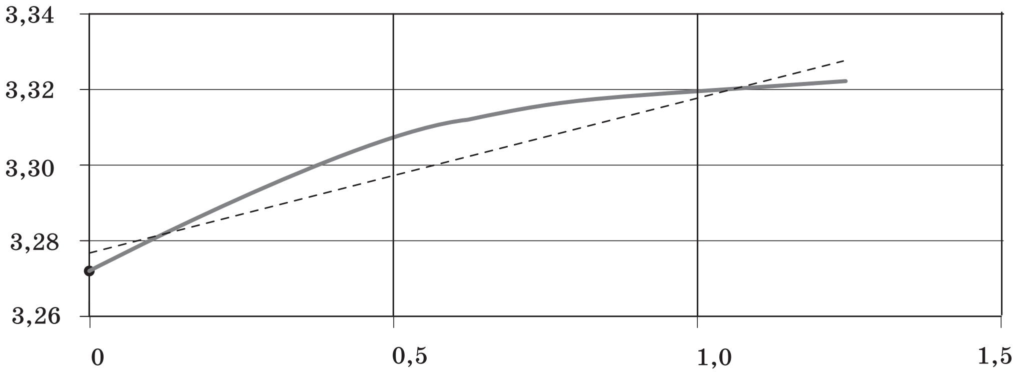

Рис. 4. Определение значения индекса фрактальности при оценке динамической структуры главной компоненты матрицы финансовых показателей ОАО «Калищехлеб» по кварталам (2004–2008 гг.)

Таким образом, фрактальный анализ с успехом может использоваться в качестве рабочего инструмента при анализе и прогнозировании финансовой несостоятельности предприятия вне зависимости законов распределения.

Литература

1. *Айвазян С. А., Мхитарян В. С.* Прикладная статистика и основы эконометрики: учебник для студ. эконом. специальностей вузов. М. : ЮНИТИ, 1998.
2. *Божокин С. В., Паршин Д. А.* Фракталы и мультифракталы. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
3. *Глухих И. Ю.* Разработка моделей экспресс-анализа финансовой состоятельности организаций на базе методов многомерного и регрессионного анализа // Управленческое консультирование. 2011. № 3. С. 165–196.
4. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М. : Институт компьютерных исследований, 2002.
5. *Петерс Э.* Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории хаоса в *инвестициях* и экономике. М. : Интернет-трейдинг, 2004.
6. *Старченко Н. В.* Индекс фрактальности и локальный анализ хаотических временных рядов с помощью индекса фрактальности: автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2005.

References

1. Ayvazyan S. A., Mkhitaryan V. S. *Applied statistics and fundamentals of econometrics* [Prikladnaya statistika i osnovy ekonometriki]: textbook for students of the economics specialties of higher education institutions. M. : UNITY, 1998. 1022 p. (rus)
2. Bozhokin S. V., Parshin D. A. *Fractals and multifractals* [Fraktaly i mul'tifraktaly]. Izhevsk : Research Center “Regular and chaotic dynamic” [NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika»], 2001. 128 p. (rus)
3. Glukhikh I. Yu. *Development of models of the express analysis of a financial solvency of the organizations based on methods of the multidimensional and regression analysis* [Razrabotka modelei ekspress-analiza finansovoi sostoyatel'nosti organizatsii na baze metodov mnogomernogo i regressionnogo analiza] // Administrative consulting [Upravlencheskoe konsul'tirovanie]. 2011. № 3. P. 165–196. (rus)
4. Mandelbrot B. *Fractal geometry of the nature* [Fraktal'naya geometriya prirody]. M. : Institute of computer researches [Institut komp'yuternykh issledovanii], 2002. 656 p. (rus)
5. Peters E. *Fractal analysis of the financial markets: Application of the theory of chaos in investments and economy* [Fraktal'nyi analiz finansovykh rynkov: Primenenie teorii khaosa v investitsiyakh i ekonomike]. M. : Internet trading, 2004. 304 p. (rus)
6. Starchenko N. V. *An index of fractality and the local analysis of chaotic temporary ranks by means of a fractality index* [Indeks fraktal'nosti i lokal'nyi analiz khaoticheskikh vremennykh ryadov s pomoshch'yu indeksa fraktal'nosti]: dissertation *abstract*. Moscow, 2005. (rus)