

Наумов В. Н., Буров С. А.

Прогнозирование валютных курсов на основе сравнительного анализа динамики временных рядов

Наумов Владимир Николаевич

Северо-Западный институт управления — филиал РАНХиГС (Санкт-Петербург)
Заведующий кафедрой бизнес-информатики, математических и статистических методов
Доктор военных наук, профессор
naumov122@list.ru

Буров Сергей Александрович

Военный учебно-научный центр ВМФ (Санкт-Петербург)
Адъюнкт
burov_spb@mail.ru

РЕФЕРАТ

В статье рассмотрены средства сравнительного анализа динамики нескольких временных рядов на примере динамики курсов основных валют по их отношению к рублю. Приведены результаты такого анализа для различных периодов времени.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

временной ряд, курсы валют, регрессионная модель, проверка статистических гипотез, критерий Стьюдента, ошибка первого рода, стационарность временного ряда, критерий Льюинга-Бокса

Naumov V. N., Burov S. A.

Comparative Analysis of Dynamics of Time Series

Naumov Vladimir Nikolaevich

North-West Institute of Management — branch of the Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Saint-Petersburg, Russian Federation)
Head of the Chair of Business Informatics, Mathematics and Statistical Methods
Doctor of Science (Military Science), Professor
naumov122@list.ru

Burov Sergey Aleksandrovich

Military Educational-and-Research Centre Naval Academy (Saint-Petersburg, Russian Federation)
Adjunct
burov_spb@mail.ru

ABSTRACT

The article discusses the means of comparative analysis of the dynamics of multiple time series on the example of the major currencies in their relation to the ruble. The results of this analysis for different time periods.

KEYWORDS

Time series, exchange rates, regression model, statistical hypothesis testing, t-test, the error of the first kind, stationary time series, Luying — Boxing criterion

Изучение зависимости между временными рядами, сравнительный анализ их динамики являются одними из наиболее сложных задач эконометрики. Для их решения используются, например, методы корреляционно-регрессионного анализа, при использовании которых происходит построение регрессионных моделей,

связывающих между собой исследуемые временные ряды. При этом возникают серьезные проблемы, связанные с корреляцией каждой переменной со случайной составляющей, наличием в моделях фактора времени и др. Для борьбы с такими проблемами используются методы последовательных разностей, исключения тенденции, включения в модель времени и др. Даже в случае успешного решения указанных задач вопрос сравнительного анализа полученных трендов остается открытым [1; 2].

В статье рассмотрена задача проверки статистической гипотезы о совпадении динамики временных рядов на примере рядов, содержащих курсы основных валют по сравнению с курсом рубля. Данные для решения такой задачи взяты из официальных источников, представляемых Центробанком России¹. В качестве примера рассмотрены три основные валюты: доллар (USD), евро (EUR) и юань (CYN). Решены задачи для двух временных интервалов: краткосрочного, общей продолжительностью в шесть месяцев, и долгосрочного — общей продолжительностью пять лет.

Диаграммы уровней указанных временных рядов приведены на рис. 1 и 2. Графическое представление данных временных рядов позволяет сформулировать гипотезу о совпадении их динамики.

Корреляционная матрица для краткосрочного периода, приведенная на рис. 3, показывает наличие парной корреляции между анализируемыми временными рядами. Поэтому можно предложить гипотезу о незначимом отличии динамики данных временных рядов.

Сформулируем такую задачу в общем виде. Проверку подобных гипотез заменим проверкой статистической гипотезы о стационарности временного ряда, полученного как разность анализируемых пар временных рядов, например, пар рядов рассматриваемых валют. Допущение того, что временные ряды анализируются в одинаковых условиях наблюдений (один и тот же временной период, одни и те же виды тенденций, одинаковые условия наблюдений), позволяет предположить, что каждый из временных рядов относится к классу TS -рядов, и при исключении тренда ряд становится стационарным [1].

Таким образом, при рассмотрении пар временных рядов $y^i(t)$, $y^k(t)$ с одинаковыми трендами, ряд разностей $\Delta^{ik} = y^i(t) - y^k(t)$ должен быть стационарным. Следовательно, проверка гипотезы о совпадении динамики временных рядов заменяется проверкой гипотезы о стационарности разностного ряда. Для проверки такой гипотезы могут быть использованы известные статистические критерии проверки стационарности, например, критерий Льюинга-Бокса, а также графические средства анализа, например, коррелограммы.

В случае если в результате проверки подобной гипотезы выявлен факт нестационарности разностного ряда, то целесообразно выявить причины такой стационарности. Предлагается данную задачу решать путем проверки значимости отличий параметров моделей временных рядов. Предположим, что рассматриваются несколько временных рядов, и модели трендов каждого из временных рядов относятся к полиномиальным (любую непрерывную функцию можно представить полиномом). Также предположим, что модели имеют одинаковый порядок полинома n . Теоретические регрессионные модели будут иметь вид:

$$y^j = \omega_0^j + \omega_1^j t + \dots + \omega_n^j t^n,$$

где ω_i^j — i -й коэффициент j -й регрессионной модели.

¹ Динамика курсов валют по курсу ЦБ с информационного финансового портала Банка.ру: [Электронный ресурс]. URL: <http://www.banki.ru/products/currency>. (Дата обращения: 26.10.2014).

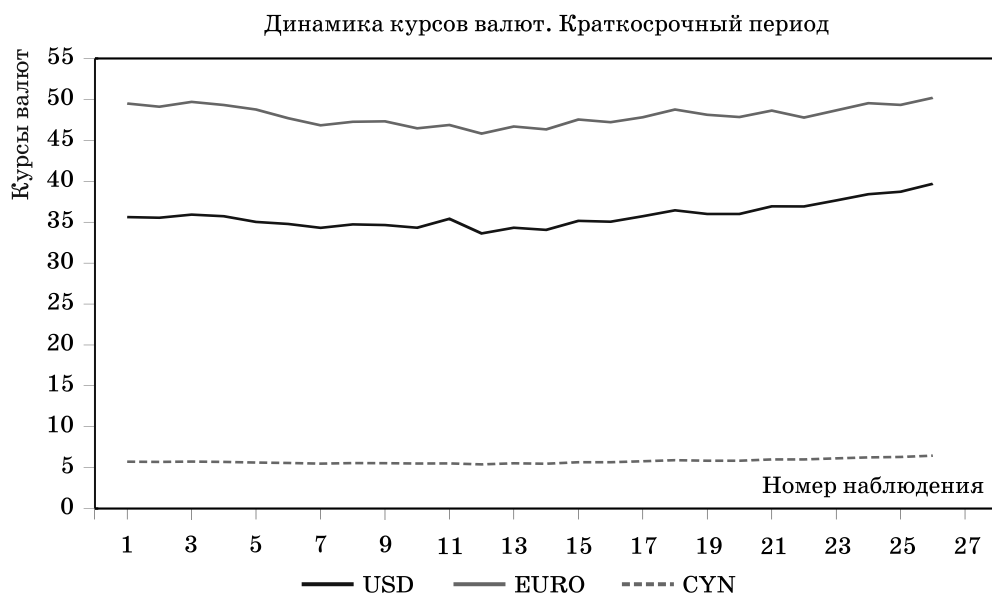


Рис. 1. Графики курсов валют в период с апреля по сентябрь 2014 г .



Рис. 2. Графики курсов валют в период с 2009 по 2013 г.

Variable	Correlations (Spreadsheet1)				
	Marked correlations are significant at p < ,05000				
	Means	Std. Dev.	USD	EURO	CYN
USD	35.80	1.51	1.00	0.77	0.99
EURO	48.05	1.19	0.77	1.00	0.74
CYN	5.77	0.28	0.99	0.74	1.00

Рис. 3. Корреляционная матрица для краткосрочного периода

Выборочные регрессионные модели имеют вид:

$$y^j = w_0^j + w_1^j t + \dots + w_n^j t^n,$$

где w_i^j — оценка i -го коэффициента j -й регрессионной модели.

Такую ситуацию можно обеспечить, если порядок полинома всех моделей определить старшим порядком моделей. В этом случае можно для каждой пары сравниваемых моделей сформулировать нулевую гипотезу на выбранном уровне значимости о том, что их параметры (коэффициенты полиномиальных моделей регрессий) совпадают. Тогда сложная статистическая гипотеза распадается на n простых гипотез, имеющих вид: $\omega_i^j = \omega_i^k$, где ω_i^j , ω_i^k — значения i -х параметров тренда j -й и k -й моделей соответственно, $i = \overline{0, n}$.

Как правило, при решении задачи проверки статистических гипотез используется статистический критерий Стьюдента (t -критерий) [2]. Наблюдаемое значение t -критерия при допущении о том, что дисперсии неравны и неизвестны, вычисляется с помощью соотношения:

$$t_i^{jk} = \frac{w_i^j - w_i^k}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{w_i^j}^2}{N_j} + \frac{\hat{\sigma}_{w_i^k}^2}{N_k}}}, \quad (1)$$

где $\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{w_i^j}^2}{N_j} + \frac{\hat{\sigma}_{w_i^k}^2}{N_k}}$ — ошибка оценки разности $\omega_i^j - \omega_i^k$; $\hat{\sigma}_{w_i^j}^2$, $\hat{\sigma}_{w_i^k}^2$ — оценки дисперсии w_i^j , w_i^k соответственно; N_j , N_k — число наблюдений (размер выборки).

Для определения критического значения параметра Стьюдента число степеней свободы может быть оценено с помощью соотношения:

$$v \approx \frac{\left(\frac{\hat{\sigma}_{w_i^j}^2}{N_j} + \frac{\hat{\sigma}_{w_i^k}^2}{N_k} \right)^2}{\left(\frac{\hat{\sigma}_{w_i^j}^2}{N_j} / N_j \right)^2 + \left(\frac{\hat{\sigma}_{w_i^k}^2}{N_k} / N_k \right)^2} \cdot \frac{N_j - 1}{N_k - 1}. \quad (2)$$

Результаты регрессионного анализа позволяют оценить ошибки оценки каждого параметра модели:

$$S_{w_0} = S_{\text{ост}} \sqrt{\left((X^T X)^{-1} \right)_{11}}, \quad (3)$$

$$S_{w_i} = S_{\text{ост}} \sqrt{\left((X^T X)^{-1} \right)_{i+1, i+1}};$$

где $S_{\text{ост}}$ — дисперсия остатка; n — число параметров модели регрессии; X — матрица наблюдений.

С учетом сравнительно большого размера выборки принимаем:

$$\frac{\left(\hat{\sigma}_{w_i^j}^2 / N_j \right)^2}{N_j - 1} \approx \frac{\left(\hat{\sigma}_{w_i^j}^2 / N_j \right)^2}{N_j} \approx \frac{\hat{\sigma}_{w_i^j}^2}{N_j} = S_{w_i^j}^2; \quad (4)$$

$$\frac{\left(\hat{\sigma}_{w_i^k}^2 / N_k \right)^2}{N_k - 1} \approx \frac{\left(\hat{\sigma}_{w_i^k}^2 / N_k \right)^2}{N_k} \approx \frac{\hat{\sigma}_{w_i^k}^2}{N_k} = S_{w_i^k}^2.$$

Такое допущение приводит к тому, что число степеней свободы незначительно увеличивается, что может привести к небольшому увеличению порогового значения и незначительному увеличению уровня значимости α . Следовательно, число степеней свободы будет вычисляться с помощью соотношения:

$$v \approx \frac{\left(\frac{\hat{\sigma}_{w_j}^2}{N_j} + \frac{\hat{\sigma}_{w_k}^2}{N_k} \right)^2}{\frac{\hat{\sigma}_{w_j}^2}{N_j} + \frac{\hat{\sigma}_{w_k}^2}{N_k}}. \quad (5)$$

Таким образом, если выполняются все n нулевых гипотез о незначимом отличии выборочных коэффициентов сравниваемых моделей трендов (о совпадении значений соответствующих коэффициентов теоретических моделей), можно сделать вывод о совпадении трендов моделей, и, следовательно, об одинаковой динамике сравниваемых признаков (сравниваемых валют).

В другой постановке, проверяя статистические гипотезы, можно определить вероятности ошибки первого рода α_i при принятии решения о справедливости нулевой гипотезы для каждой пары коэффициентов $\hat{w}_i^j$, $\hat{w}_i^k$ соответственно. Зная значения данных вероятностей, можно найти вероятность того, что все коэффициенты моделей тренда совпадают и, следовательно, вероятность события A_{jk} , состоящего в том, что сравниваемые временные ряды (признаки, валюты) ведут себя одинаково. Такая вероятность определяется с помощью соотношения $\alpha^{jk} = \max\{\alpha_i^{jk}\}$, где α_i^{jk} — рассчитанные значения уровня значимости, соответствующие наблюдаемым значениям критерия Стьюдента t_i^{jk} .

Для проверки достоверности предложенного подхода проведем анализ динамики основных курсов валют по отношению к курсу рубля. В связи с тем, что изначальная стоимость валют различна (см. рис. 1, 2), необходимо привести курсы валют к одной шкале. С этой целью следует стандартизировать все значения уровней временных рядов за указанные периоды: $y_{st}^j(t) = (y^j(t) - \bar{y}^j)/S^j$, где $\bar{y}^j$ — среднее уровней j -го временного ряда; S^j — оценка стандартного отклонения. В результате стандартизации математические ожидания $M(y_{st}^j(t)) = 0$.

На рис. 4–5 приведены графики динамики изменений стандартизированных значений курсов трех основных валют для краткосрочного и долгосрочного периодов.

На рис. 6 приведены коррелограммы разностных рядов трех пар валют для краткосрочного периода, построенных в пакете STATISTICA: доллар-евро; доллар-юань; евро-юань.

Форма коррелограмм (превышение или не превышение ее уровней столбцов, указывающих на значение нормированной автокорреляционной функции для разных значений временного лага границ доверительного интервала «белого шума») указывает на то, что для первой и третьей пар валют имеются такие превышения, а для второй их нет. Поэтому, а также по наблюдаемому значению критерия Льюинга-Бокса (столбец справа от графика с именем Q) можно сделать вывод, что доллар и юань имеют одинаковую динамику, а у евро динамика, отличная от них.

Следует отметить, что для долгосрочного периода все разностные ряды не являются стационарными, что требует дополнительного исследования случайных составляющих ряда, так как за пять лет наблюдений анализируемая ситуация изменилась. За этот период произошли не только количественные, но и качественные изменения (в том числе мировой кризис). Поэтому возможно, что нестационарность определена нестационарностью случайной составляющей, и предположение о TS -стационарности временных рядов, сделанное раньше, не выполняется.



Рис. 4. Динамика стандартизированного курса основных валют за краткосрочный период



Рис. 5. Динамика нормированного курса основных валют за долгосрочный период

Для выявления причин отсутствия стационарности, а также для проверки работоспособности предлагаемого подхода выполнена проверка пар статистических гипотез для краткосрочного и долгосрочного периодов. С этой целью в табл. 1 приведены модели трендов каждого стандартизированного временного ряда. В силу того, что ряды стандартизированы, $M(y_{st}^i(t)) = 0$, для каждого из них в модели отсутствует коэффициент ω_0^i .

Отметим, что для долгосрочного периода по сравнению с краткосрочным модели оказались более сложными. При этом порядок полинома подбирался по значению коэффициента детерминации или индекса корреляции, значения которого приведены в табл. 2.

Полученные индексы корреляции близки по значению к единице, что подтверждает достоверность полученных регрессионных моделей.

Наблюдаемые значения критерия Стьюдента для различных пар значений коэффициентов модели для моделей краткосрочного и долгосрочного периодов приведены в табл. 3 и 4.

Применительно к рассматриваемым временным рядам критическое значение t -критерия для уровня значимости $\alpha = 0,05$ равно 2,09. Таким образом, для первой и третьей пар валют параметры моделей значимо отличаются. Для первой пары причиной отличий являются разные скорости роста курса валюты. Разностный ряд имеет линейную тенденцию. Коэффициент роста постоянен. Для третьей пары различны как скорость, так и ускорение. Разностный ряд имеет нелинейную тенденцию. Коэффициент роста переменный.

Применительно к рассматриваемым временным рядам критическое значение критерия для уровня значимости $\alpha = 0,05$ равно 2,00. Таким образом, для первой и третьей пар параметров моделей значимо отличаются. Для первой пары причиной отличий являются разные скорости, ускорение и ускорение скорости роста валюты. Для третьей пары различно только ускорение. Для второй пары отличий нет. Поэтому еще раз подтверждается допущение о том, что случайная составляющая, определяющая общее состояние рынка, изменилась и нестационарность разностного ряда, которая была выявлена путем построения коррелограмм, не определяется только трендом. Разностный ряд, возможно, не является TS-рядом.

В табл. 5 приведены значения уровня значимости (допустимая вероятность ошибки принятия решения), который следует задать, чтобы принять решение о значимости различий.

Минимальная вероятность ошибки, которую можно задать для принятия гипотезы о значимости отличий трех пар валют, равна $\alpha^{jk} = \max\{\alpha_i^{j,k}\} = 0,68$.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

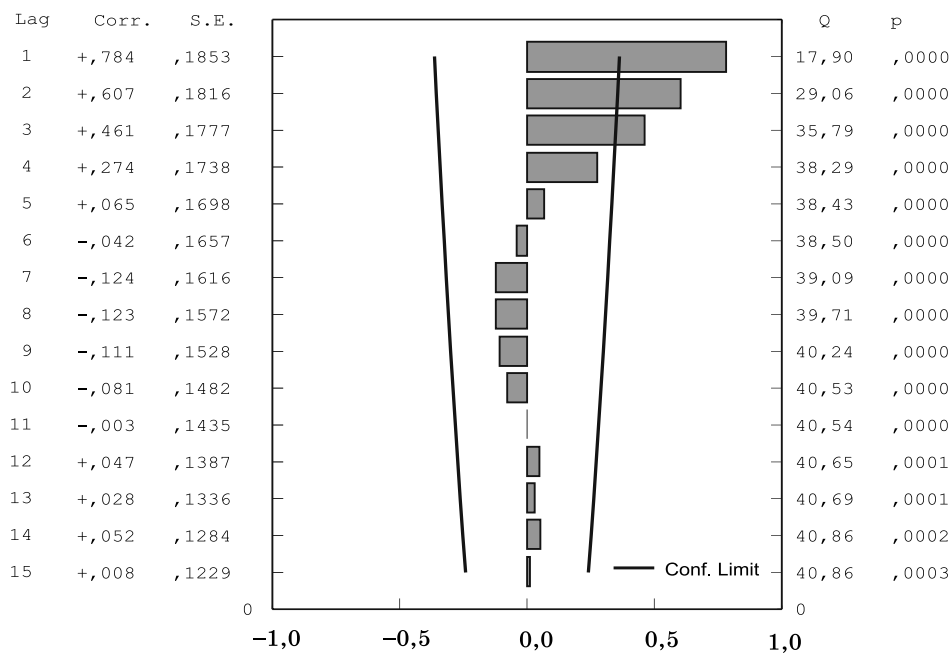
1. Для различных периодов времени и различных пар сравниваемых валют справедливы различные статистические гипотезы о динамике основных курсов валют. Таким образом, валюты ведут себя по-разному.

Таблица 5

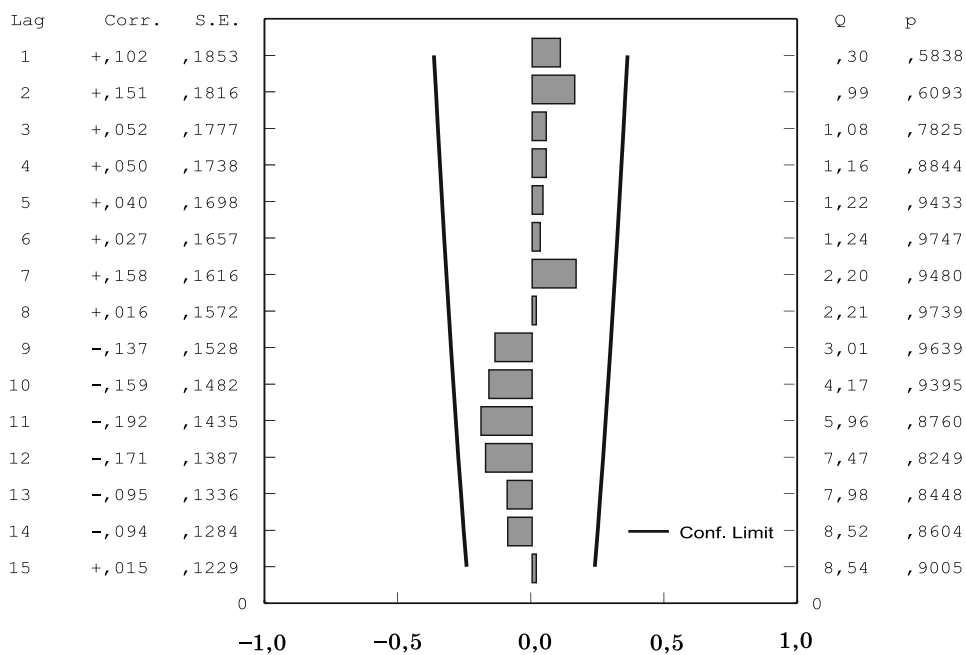
**Значения уровней значимости для принятия гипотезы
об отличии значений коэффициентов моделей
при рассмотрении краткосрочного периода**

Коэффициент	Пары сравниваемых валют		
	USD-EURO	USD-SYN	EURO-CYN
ω_1	0,01	0,56	0,003
ω_2	0,11	0,68	0,000

а) Автокорреляционная функция сравнение доллар-евро
(Standard errors are white-noise estimates)



б) Автокорреляционная функция сравнение доллар-юань
(Standard errors are white-noise estimates)



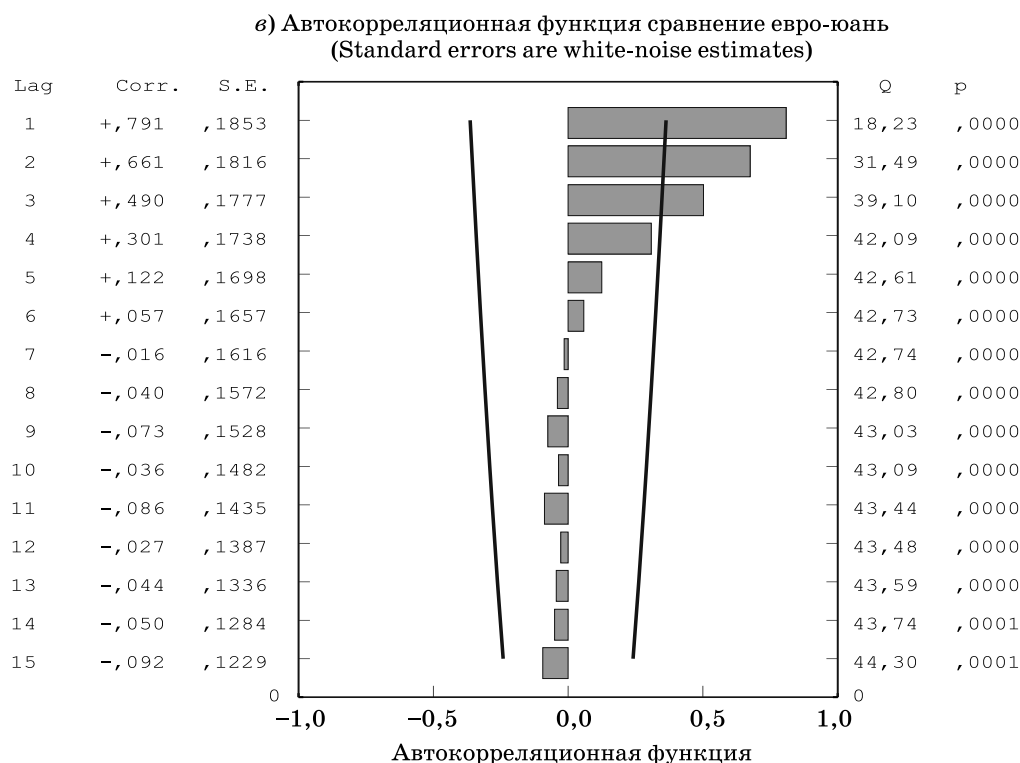


Рис. 6. Коррелограммы автокорреляционных функций для пар анализируемых валют:
а) доллар-евро; б) доллар-юань; в) евро-юань

- Динамика изменения доллара за краткосрочный период совпадает с динамикой юаня, что свидетельствует о наличии общих тенденций у этих валют, о сильной связи экономик соответствующих стран и зависимости их валют. Это определяется ролью экономик США и Китая и их влиянии на мировую экономику. Такая ясная экономическая интерпретация подтверждает достоверность предложенного подхода.
- Динамика евро по отношению к рублю существенно отличается от динамики двух остальных валют, как для краткосрочного, так и для долгосрочного периода. Видимо, это можно объяснить большей интеграцией российской экономики и

Таблица 1

Модели трендов анализируемых временных рядов

Валюта	Краткосрочный период	Долгосрочный период
Доллар	$\hat{y} = -0,03t + 0,0027t^2$	$\hat{y} = -0,31t + 0,009t^2 - 0,00007t^3$
Евро	$\hat{y} = -0,058t + 0,0003t^2$	$\hat{y} = -0,16t + 0,002t^2 + 0,000006t^3$
Юань	$\hat{y} = -0,032t + 0,0003t^2$	$\hat{y} = -0,23t + 0,0080t^2 - 0,00007t^3$

Таблица 2

**Значения индекса корреляции для построенных моделей
(с точностью до двух знаков после запятой)**

Валюта	Краткосрочный период	Долгосрочный период
Доллар	0,96	0,76
Евро	0,87	0,76
Юань	0,98	0,87

Таблица 3

**Значения критерия Стьюдента пар сравниваемых валют
для краткосрочного периода**

Коэффициент	Пары сравниваемых валют		
	USD-EURO	USD-SYN	EURO-CYN
ω_1	2,80	0,60	3,36
ω_2	1,63	0,42	8,57

Таблица 4

**Значения критерия Стьюдента пар сравниваемых валют
для долгосрочного периода**

Коэффициент	Пары сравниваемых валют		
	USD-EURO	USD-SYN	EURO-CYN
ω_1	2,02	1,20	1,09
ω_2	2,45	0,42	1,11
ω_3	2,53	0,20	2,67

экономик европейских государств. Наиболее существенными являются отличия в скорости изменения курса, что свидетельствует о разных линейных тенденциях в изменении курса валют.

Таким образом, приведенные результаты говорят об инструментальной возможности сравнительного анализа динамики временных рядов, описывающих подобные процессы, об актуальности решения подобных задач с целью прогнозирования валютных курсов, выявления и управления рисками и др.

Литература

1. Курзенов В. А., Клебанова Т. С., Наумов В. Н., Гурьянова Л. С. Методы и модели прогнозирования социально-экономических процессов. СПб. : Изд. СЗИУ РАНХиГС, 2012. 564 с.
2. Айвазян С. А. Прикладная статистика. Основы эконометрики. Т. 2. М. : ЮНИТИ, 2001. 432 с.

References

1. Kurzenov V. A., Klebanova T. S., Naumov V. N., Guryanova L. S. *Methods and models of forecasting of social and economic processes* [Metody i modeli prognozirovaniya sotsial'no-ekonomicheskikh protsessov]. SPb. : NWIM of RANEPa Publishing House [Izd. SZIU RANKhiGS], 2012. 564 p.
2. Ayvazyan S. A. *Applied statistics. Fundamentals of econometrics* [Prikladnaya statistika. Osnovy ekonometriki]. V. 2. M. : Unity [Yuniti], 2001. 432 p.